PROBLÈME A

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls) on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $(n \times n)$ à coefficients réels; cet espace vectoriel contient I_n, matrice unité pour la multiplication, et la matrice U_n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Une projection de $\mathbb{R}^n$ est un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $f^2 = f \circ f = f$.

Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel vérifiant $n \geqslant 3$.

Étant donné $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 < 2p < n$, on note C_p la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$C_p = \left(\begin{array}{c|c|c} U_p & (0) & U_p \\ \hline (0) & (0) & (0) \\ \hline U_p & (0) & U_p \end{array}\right)$$

(matrice par blocs dont les « coins » sont des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ à coefficients égaux à 1, les autres coefficients étant nuls).

1. Étude du cas $n = 5$, $p = 2$.

   a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice :

$$C = C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   b. Calculer, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice $(I_5 + \alpha C)^k$.

   Dans les questions 2, 3 et 5, on note p un entier naturel tel que $0 < 2p < n$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice C_p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   a. Déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ [noyau et image de f].

   b. Montrer que f n'admet qu'une valeur propre non nulle et la déterminer.

   c. Déterminer les sous-espaces propres de f.

3. Calculer $(C_p)^2$ et montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $\lambda C_p = P$ soit la matrice d'une projection $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Retrouver, à partir des sous-espaces propres de g ceux de f obtenus à la question 2.

4. Soient p et q deux entiers naturels tels que $0 < 2p < n$ et $0 < 2q < n$. Calculer le produit $C_p C_q$ (on écrira le résultat sous forme d'une matrice par blocs dont on précisera clairement la taille et les éléments).

5. *a.* Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $(\alpha I_n + \beta C_p)$ où α et β décrivent $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit matriciel.

   b. Démontrer que si α et β sont réels, tels que $\alpha(2p\beta + \alpha) \neq 0$, la matrice $(\alpha I_n + \beta C_p)$ est inversible et calculer son inverse.

   c. Réciproquement, soit $M = \alpha I_n + \beta C_p$ une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'alors $\alpha(2p\beta + \alpha) \neq 0$.

PROBLÈME B

N.B. — *Si vous utilisez un théorème pour déduire un résultat dans le cadre de cette partie, il faut, dans ce cas, donner de la façon la plus précise possible les hypothèses et conclusion du théorème et justifier son application aux cas considérés.*

Dans toute la suite, A désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$ et telle que $A \neq \mathbb{R}$.

Pour tout x, $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_A(x) = \inf_{a \in A} \{|x - a|\}$.

I

1. Soit k, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. On dit qu'une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est k-lipschitzienne si pour tous x et y, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :
$$|g(x) - g(y)| \leqslant k|x - y|.$$
   a. Montrer que f_A est k-lipschitzienne pour un certain k que l'on déterminera.
   b. Que peut-on conclure quant à la continuité de f_A ?

2. Montrer que pour tout x, $x \in \mathbb{R}$, $f_A(x) = 0$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge dans $\mathbb{R}$ vers x.

3. Représenter le graphe de la restriction de f_A à l'intervalle I de $\mathbb{N}$ dans le cas où A et I sont les suivants :
   a. A est l'ensemble des points a de $\mathbb{R}$ tels que $a = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $I = [-6\pi, 6\pi]$.
   b. A est la réunion des intervalles [0, 1] et [2, 3] et $I = [-2, 6]$.
   c. A est l'ensemble de points a de $\mathbb{R}$ tels que $a = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, et $I = \left[\frac{1}{16}, 2\right]$.

4. Soit n fixé dans $\mathbb{N}$ et A_n l'ensemble des points a de $\mathbb{R}$ tels que $a = \frac{2k\pi}{2^n}$, $k \in \mathbb{Z}$.
   a. Déterminer la limite simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonction $(f_{A_n}, n \in \mathbb{N})$.
   La suite $(f_{A_n}, n \in \mathbb{N})$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$ vers cette limite ?
   b. Déterminer :
$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} f_{A_n}(x) \right) dx.$$

II

1. Soit a, $a \in A$, tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel l'intervalle $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ soit inclus dans A.
   Montrer que f_A est dérivable en a et calculer cette dérivée.

2. Supposons que A est borné dans $\mathbb{R}$ et que x, $x \in \mathbb{R}$, est tel que $f_A(x) \neq 0$.
   a. Soit x tel que $a < x$ pour tout a, $a \in A$. Calculer $f_A(x)$ en fonction de x et M_A où $M_A = \sup_{a \in A} a$.
   L'application f_A est-elle dérivable en x ? Si oui calculer $f'_A(x)$.

Tournez la page S.V.P.

b. Soit x tel que $x < a$ pour tout a, $a \in A$. Calculer $f_A(x)$ en fonction de x et m_A où $m_A = \inf_{a \in A} a$.

L'application f_A est-elle dérivable en x? Si oui calculer $f'_A(x)$.

c. L'application f_A est-elle dérivable aux points M_A et m_A?

3. Soit t, $t \in \mathbb{R}$, et notons par $B(t)$ l'ensemble des réels z, $z \in A$, tels que $t < z$ et par $C(t)$ l'ensemble des réels z, $z \in A$, tels que $z < t$.

Pour t, $t \in \mathbb{R}$, tel que $B(t)$ et $C(t)$ sont non vides, on note enfin : $M_{C(t)} = \sup_{c \in C(t)} c$ et $m_{B(t)} = \inf_{b \in B(t)} b$.

Supposons que x, $x \in \mathbb{R}$, est tel que $f_A(x) \neq 0$ et qu'il ne majore ni ne minore A.

a. Montrer que $f_A(x) = \min(f_{B(x)}(x), f_{C(x)}(x))$.

b. Montrer qu'il existe un intervalle $I(x)$ contenant x (intervalle que l'on déterminera) tel que les fonctions $t \longmapsto M_{C(t)}$ et $t \longmapsto m_{B(t)}$ sont constantes sur $I(x)$.

c. Montrer que si x est différent de $\dfrac{M_{C(x)} + m_{B(x)}}{2}$, alors f_A est dérivable en x et calculer $|f'_A(x)|$.

d. Montrer que si x est égal à $\dfrac{M_{C(x)} + m_{B(x)}}{2}$, alors f_A est dérivable à gauche et à droite en x et calculer ces dérivées à gauche et à droite (en x).

L'application f_A est-elle dérivable en x ?

4. Soit A l'ensemble des points z, $z \in \mathbb{R}$, tels que $z = \dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

On pose $g_A(x) = \dfrac{f_A(x)}{x}$ pour tout x, $x \in \mathbb{R}$, non nul.

Si $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ et $y_n = \dfrac{3}{2^{n+1}}$, calculer $g_A(x_n)$ et $g_A(y_n)$ et déterminer $\lim_{n \to +\infty} g_A(x_n)$ et $\lim_{n \to +\infty} g_A(y_n)$.

Que peut-on conclure concernant la dérivabilité à droite en 0 de f_A ?

III

Soit A l'ensemble des points a, $a \in \mathbb{R}$, tels que $a = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que f_A est 2π-périodique et continue.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f_A.

3. Est-ce-que la série de Fourier de f_A converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$ vers f_A ?

4. Calculer les sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \; ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \; ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \; ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \; .$$

IMPRIMERIE NATIONALE